Schartzschildradius

Het berekenen van de waarnemingshorizon van een niet draaiend zwart gat wordt normaliter berekend met behulp van de vergelijking van de Schwarzschildradius. Op de NL-pagina staat een simplistische uitleg maar die is fout. Daar wordt uitgegaan van de berekening van de ontsnappingssnelheid van een kinetische energie van een object met de snelheid c van

$E_k = \frac{1}{2} m v^2$. Dat moet echter zijn $E_k = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ en die gaat bij een snelheid c naar oneindig.

Ik bedacht een simpeler methode.

Neem het hypothetische geval dat we een ster, die zich precies tussen ons en een zwart gat in bevindt, met een beperkte snelheid van zo'n *1000 km/s* naar het zwarte gat toe zien bewegen. De roodverschuiving is dan nog verwaarloosbaar klein.

Naarmate de ster het zwarte gat nadert, zal door de toenemende zwaartekracht gravitationele roodverschuiving plaatsvinden. Door de aantrekkingskracht van het zwarte gat neemt de snelheid toe, maar voor ons als waarnemer lijkt die veel sneller toe te nemen. Dat dit niet zo is, blijkt uit het feit, dat voor ons als waarnemer de ster het zwarte gat nooit bereikt. Uiteindelijk neemt de roodverschuiving zodanig toe, dat de temperatuur van de ster alleen nog in enkele graden Kelvin of nog minder kan worden uitgedrukt. De limiet is daar waar de tijddilatatie gelijk aan 1 is.

Tijddilatatie

De tijddilatatie van twee klokken op geringe hoogteverschillen in een zwaartekrachtveld is gelijk aan gh/c^2 .

Voor een klok op aarde en een klok ver buiten het bereik van het gravitatieveld van de aarde geldt uiteraard niet dat *g* constant is;

$$g(r) = \frac{GM}{r^2} \qquad G \, is \, de \, gravitatieconstante \, en \, M \, de \, massa \, van \, de \, aarde .$$

We integreren $g(r)$ daarom van het oppervlak van de aarde $R_o = straal \, aarde$ tot oneindig;

$$g[R_o - \infty] = \int_{R_0}^{\infty} \frac{GM}{r^2} \, dr = -\left[\frac{GM}{r}\right]_{R_o}^{\infty} = -0 + \frac{GM}{R_0} = \frac{GM}{R_0} \, m^2 s^{-2}$$

Voor een waarnemer in het oneindige wordt de tijd op het oppervlak van een massa gemeten als:

$$t_o = \left(1 - \frac{GM}{R_o c^2}\right) . t$$

Uiteraard geldt deze formule ook voor objecten met andere massa's en dus ook voor zwarte gaten.

Voor een zwart gat geldt dat $t_0 = 0$ dus $\frac{GM}{R_o c^2} = 1$, hieruit volgt $R_o = \frac{GM}{c^2}$

Deze uitkomst staat echter haaks op de uitkomst van Schwarzschildradius. Daarvoor geldt:

$$R_o = \frac{2 GM}{c^2}$$